ALGEBRA

Rechnen mit Beträgen

Teil 1

Einfache Betragsgleichungen lösen

Datei 12160

Stand: 23. Mai 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Folgende Texte zu Ungleichungen und Beträgen gibt es derzeit auf der Mathematik-CD:

12150	Lineare Ungleichungen mit 1 Variablen, Doppelungleichungen, Oder-Verknüpfung
12160	Beträge, einfache Betragsgleichungen
12161	Lineare Betragsungleichungen mit 1 Variablen
12162	Betrags(un)gleichungen – schwere Aufgaben
12190	Lineare Ungleichungen mit 2 Variablen
12270	Quadratische Ungleichungen
12272	Bruch-Ungleichungen
41005	Ungleichungen beweisen
41006	Ungleichungen mit Hilfe von ln und e lösen
41008	Betrags(un)gleichungen anwenden
41021	Lineare Betragsfunktionen
41022	Quadratische Betragsfunktionen
41023	Gebrochen rationale Betragsfunktionen

Inhalt

1. Betrag einer Zahl 3

2 Betragsgleichungen 4

2.1 Einfachste Betragsgleichungen 4
2.2 Abstände auf dem Zahlenstrahl 5
2.3 Abstandsgleichungen 6
2.4 Lineare Betragsgleichungen 8
2.5 Quadratische Betragsgleichungen 9

Lösungen zu den Trainingsaufgaben 10 - 13

1. Betrag einer Zahl

Man hat den Betrag **IxI** einer Zahl x eingeführt, um eine Möglichkeit zu besitzen, ***eine Zahl x positiv zu machen***.

Beispiel: Wenn x = -5 ist, dann bedeutet $|x| = 5$, also $|-5| = 5$

Ist die Zahl x schon positiv, etwa x = 5, dann ist $|5| = 5$

Man kann vereinfachend sagen: **Der Betrag einer Zahl sei die Zahl ohne Vorzeichen.**
Diese Definition kann man so aufschreiben:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

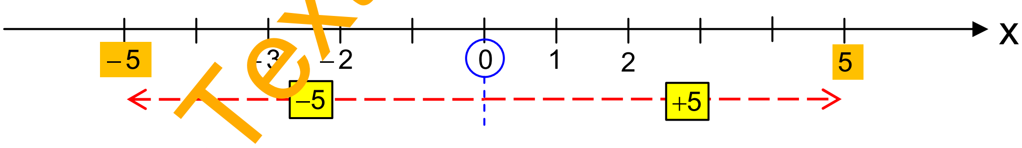
Die Schreibweise der unteren Definitionszeile verstehen Schüler oft nicht. Daher dazu noch ein Beispiel. x sei eine negative Zahl, also z. B. x = - 7, Dann besagt diese zweite Zeile, dass der Betrag ein zusätzliches Minuszeichen davorsetzt. $|-7| = -(-7)$

Und das heißt natürlich $|-7| = -(-7) = 7$.

Dieses zusätzliche Minuszeichen macht also negative Zahlen positiv..

Merke: Der Betrag soll eine Zahl positiv machen: $|+5| = 5$ und $|-5| = 5$.
Bei positiven Zahlen ist die Berechnung des Betrags ohne Wirkung.

Geometrische Bedeutung für den Betrag



Erkenne: Die Zahlen 5 und – 5 (auf der Zahlenachse) haben denselben Abstand von 0, nämlich 5 (Längeneinheiten)!

Der Betrag einer Zahl gibt also ihren **Abstand von 0** an!

Merke: Die Zahl, die zwischen den Betragsstrichen steht, nennt man das Argument des Betrags.
In $|x+3|$ ist also x+3 das Argument des Betrags.

2. Betragsgleichungen

2.1 Einfachste Betragsgleichungen

Beispiel 1 Die Gleichung $|x| = 5$ heißt mit Worten

entweder: Welche Zahlen haben den Betrag 5?

oder: Welche Zahlen haben von 0 den Abstand 5?

Die Lösung: Es sind die Zahlen 5 und - 5.

Daher sieht die Lösungsmethode so aus:

$$|x| = 5$$
$$x_{1,2} = \pm 5$$

Meistens schreibt man die Lösungsmenge dazu: **L =** $\{\pm 5\}$

Beispiel 2

$$|x| = 17$$
$$x_{1,2} = \pm 17$$
$$L = \{\pm 17\}$$

So kurz ist die komplette Lösung!

Beispiel 3

$$|x| = -4$$

Da ein Abstand nie negativ werden kann,
besitzt diese Gleichung keine Lösung: $L = \{\ \}$.

Beispiel 4

$$|x| = 0$$
$$x = 0$$
$$L = \{0\}$$

Betragsgleichungen suchen nach Zahlen, die einen bestimmten Abstand haben sollen.

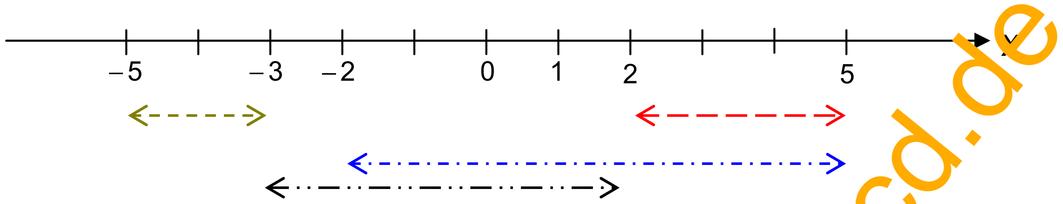
Man kann also die Methode zur Lösung solch einfacher Betragsgleichungen so formulieren:

Wenn der Betrag einer Zahl a ist, dann muss das Argument des Betrags $\pm a$ sein.
Das setzt aber $a \geq 0$ voraus, sonst haben wir eine Situation wie in Beispiel 3.

2.2 Abstände auf dem Zahlenstrahl - *ganz wichtig !!!*

Aufgabe: Fülle die folgende Tabelle aus:

Der Abstand von	2 und 5	-3 und 2	-2 und 5	-3 und -5
ist				



Ich führe hier eine Schreibweise ein, die für die Oberstufe wichtig ist und eine nützliche Abkürzung darstellt: Mit d(2;5) bezeichnet man den Abstand der Zahlen 2 und 5. Die Bezeichnung „d" kommt von „Distanz". **Allgemein bedeutet d(a;b) der Abstand der zwei „Zahlen" a und b.**

Hier die Lösungen der Aufgabe;

Aufgabe	Berechnung:
Der Abstand von 2 und 5 ist 3:	$d(2;5) = 5 - 2 = 3$
Der Abstand von –3 und 2 ist 5:	$d(-3;2) = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$
Der Abstand von –2 und 5 ist 7:	$d(-2;5) = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$
Der Abstand von –3 und -5 ist 2: :	$d(-3;-5) = -3 - (-5) = -3 + 5 = 2$

Bei diesen Berechnungen muss man auf die richtige Reihenfolge bei der Subtraktion achten:

Wer so rechnet, macht einen Fehler: $d(-5;-3) = -5 - (-3) = -5 + 3 = \boxed{-2}$, denn Abstände sind stets positive Zahlen.

Falsch wäre auch $d(-3;2) = -3 - 2 = -5$.

Man muss immer die kleinere Zahl subtrahieren um ein positives Ergebnis zu erhalten.

Um dieses Problem zu vermeiden, kann man den Betrag verwenden:

$$\underbrace{d(a;b) = |a - b|}_{\text{von } a \text{ subtrahieren}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{d(a;b) = |b - a|}_{\text{von } b \text{ subtrahieren}}$$

Beide Formeln liefern dasselbe Ergebnis, z. B: Der Abstand der Zahlen -18 und -12 ist:

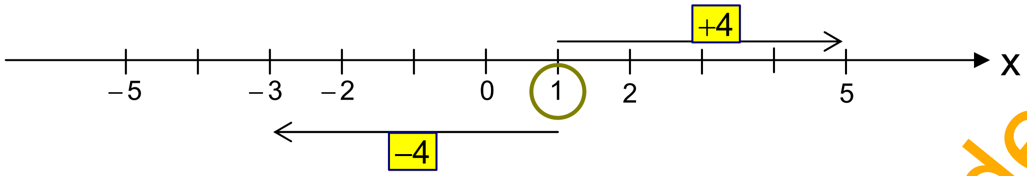
$$d(-18\,;-12) = |-18 - (-12)| = |-18 + 12| = |-6| = 6 \quad \text{oder}$$
$$d(-18\,;-12) = |-12 - (-18)| = |-12 + 18| = |6| = 6\,.$$

Es gilt also immer: $$\boxed{|a - b| = |b - a|}$$

Jetzt muss man nicht mehr auf die Reihenfolge der zu subtrahierenden Zahlen achten!

2.3. Abstandsgleichungen

Beispiel 5 Welche Zahlen haben von der Zahl 1 den Abstand 4 ?



Rein anschaulich findet man an Hand einer solchen Skizze schnell die Lösung.
Es sind die Zahlen -3 und 5.

Machen wir die Probe: $d(-3;1) = \left|\boxed{-3} - \boxed{1}\right| = |-4| = 4$

$d(5;1) = |\ 5 - 1\ | = |4| = 4$

<u>Algebraische Lösung</u>:

Für die gesuchten Zahlen verwendet man eine Variable, etwa x.
Dann kann man den gesuchten Abstand von der Zahl 1 so schreiben: $d(x;1)$
und wir wissen, wie man ihn berechnet: $d(x;1) = |x - 1|$
Laut Aufgabe soll dieser Abstand 4 sein.
Dies führt zur Gleichung: $|x - 1| = 4$
In Abschnitt 2 haben wir diese Situation eingeübt. An Beispielen wie
$|z| = 4 \quad \Rightarrow \quad z = \pm 4$ hatten wir festgehalten (und uns hoffentlich gemerkt):
Wenn der Betrag einer Zahl a ist, dann muss das Argument des Betrags $\pm a$ sein.
In unserem Beispiel soll der Betrag 4 sein, also kann das Argument nur eine der Zahlen
4 oder – 4 sein. Die ausführliche Lösung unserer Betragsgleichung sieht daher so aus:

Gegeben:	$\boxed{\|x - 1\| = 4}$	
1. Schritt:	$x - 1 = \pm 4$	(Statt des Betrages setzt man rechts $\pm$.)
2. Schritt:	$x = \pm 4 + 1$	(Auf beiden Seiten wurde 1 addiert.)
3. Schritt	$x_1 = +4 + 1 = 5$	(Beide Lösungen werden getrennt berechnet.)
	$x_2 = -4 + 1 = -3$	
Lösungsmenge:	$\boxed{\mathbf{L} = \{-3\,;5\}}$	

Dieses Schema sollte man auf den folgenden Seiten üben.

Weitere Beispiele in kurzer Form:

Beispiel 6 Welche Zahlen haben von 12 den Abstand 12?

$$|x-12| = 12$$

$$x-12 = \pm 12 \qquad | +12$$

$$x_{1,2} = \pm 12 + 12 = \begin{cases} 24 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow L = \{0 ; 24\}$$

Ergebnis: 0 und 24 haben von 12 den Abstand 12.

Beispiel 7 Welche Zahlen haben von -6 den Abstand 2?

$$|x+6| = 2$$

$$x+6 = \pm 2 \qquad | -6$$

$$x_{1,2} = -6 \pm 2 = \begin{cases} -4 \\ -8 \end{cases} \Rightarrow L = \{-4 ; -8\}$$

Beispiel 8 Welche Zahlen haben von -15 den Abstand 25?

$$|x+15| = 25$$

$$x+15 = \pm 25 \qquad | -15$$

$$x_{1,2} = -15 \pm 25 = \begin{cases} 10 \\ -40 \end{cases} \Rightarrow L = \{10 ; -40\}$$

Anmerkung: Die Aufgabe $|x+15| = 25$ berechnet alle Zahlen, die von der Zahl **-15** (nicht 15 !!!) den Abstand 25 haben.
Man darf nicht vergessen, dass im Betrag eine Differenz steht.
Und $x+15 = x-(-15)$!!!!

Trainingsaufgaben 1

Löse wie gezeigt über Betragsgleichungen!

a) Welche Zahlen haben von 34 den Abstand 46?
b) Welche Zahlen haben von -12 den Abstand 22?
c) Welche Zahlen haben von 5 den Abstand 17?
d) Welche Zahlen haben von -28 den Abstand 40?

Die Musterlösungen stehen am Ende des Textes.

2.4. Lineare Betragsgleichungen

Gleichungen wie $|3x-5| = 19$ oder $|x^2 + 4x - 33| = 12$ lassen sich nicht mehr als Abstandsaufgaben interpretieren. Dennoch kann man das gelernte Lösungsverfahren weiterhin anwenden, es gibt nur etwas mehr zu rechnen:

Beispiel 9 $|18 - x| = 22$

TRICK: Jetzt heißt es nicht mehr $x - 18$ sondern $18 - x$. Doch wegen $|a-b| = |b-a|$ darf man diese Aufgabe so ändern:

$$|x - 18| = 22$$
$$x - 18 = \pm 22$$
$$x_{1,2} = 18 \pm 22 = \begin{cases} 40 \\ -4 \end{cases}$$
$$L = \{ -4 ; 40 \}$$

Betrag weglassen, rechts $\pm$ einfügen.

Beispiel 10

$$|3x - 5| = 19$$
$$3x - 5 = \pm 19$$
$$3x = 5 \pm 19 = \begin{cases} 24 \\ -14 \end{cases}$$
$$x_1 = \tfrac{24}{3} = 8$$
$$x_2 = -\tfrac{14}{3}$$
$$L = \{ 8 ; -\tfrac{14}{3} \}$$

Betrag weglassen, rechts $\pm$ einfügen.

Trainingsaufgabe 2

Berechne die Lösungsmengen:

a)	$\lvert x\rvert = 11$	b)	$\lvert x-2\rvert = 12$	c)	$\lvert x-4\rvert = 4$
d)	$\lvert x-16\rvert = -6$	e)	$\lvert x+9\rvert = 5$	f)	$\lvert x+15\rvert = 15$
g)	$\lvert 2x+3\rvert = 7$	h)	$\lvert 4x-13\rvert = 1$	i)	$\left\lvert \frac{1}{2}x-1\right\rvert = 9$
j)	$\lvert 2-x\rvert = 9$	k)	$\lvert 8-4x\rvert = 22$	l)	$\left\lvert 2-\frac{1}{3}x\right\rvert = 4$

Lösungen am Ende des Textes.

2.5. Quadratische Betragsgleichungen

(für diejenigen, die schon quadratische Gleichungen lösen können)

Beispiel 11

$$|x^2 + 3x| = 4$$

$$x^2 + 3x = \pm 4$$

Betrag weglassen, rechts $\pm$

<u>1. Fall:</u> $x^2 + 3x - 4 = 0$

Lösung mit der Lösungsformel $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

<u>2. Fall:</u> $x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Keine weiteren Lösungen.

Lösungsmenge: $L = \{\ 1 ; -4\ \}$

Beispiel 12

$$|x^2 + 4x - 33| = 12$$

$$x^2 + 4x - 33 = \pm 12$$

1. Fall:

$$x^2 + 4x - 33 = +12$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -9 \end{cases}$$

2. Fall:

$$x^2 + 4x - 33 = -12$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $L = \{\ -9 ; -7 ; 3 ; 5\ \}$

Trainingsaufgabe 3

Berechne die Lösungsmengen:

a) $|x^2 + 16| = 9$ b) $|x^2 - 12| = 4$ c) $|x^2 - 5| = 30$

d) $|x^2 + 8x| = 9$ e) $|x^2 - 5x| = 6$ f) $|x^2 + 4x| = 1$

g) $|x^2 + 9x + 16| = 2$ h) $|x^2 - 5x - 10| = 4$ i) $|x^2 + 10x - 27| = 48$

Lösungen am Ende des Textes

Lösungen der Trainingsaufgaben

Trainingsaufgaben 1

a) Welche Zahlen haben von 34 den Abstand 46?

b) Welche Zahlen haben von -12 den Abstand 22?

c) Welche Zahlen haben von 5 den Abstand 17?

d) Welche Zahlen haben von -28 den Abstand 40?

Lösung auf der CD